

Uno sguardo retrospettivo sui Poli di Regge

Presentazione di Nota

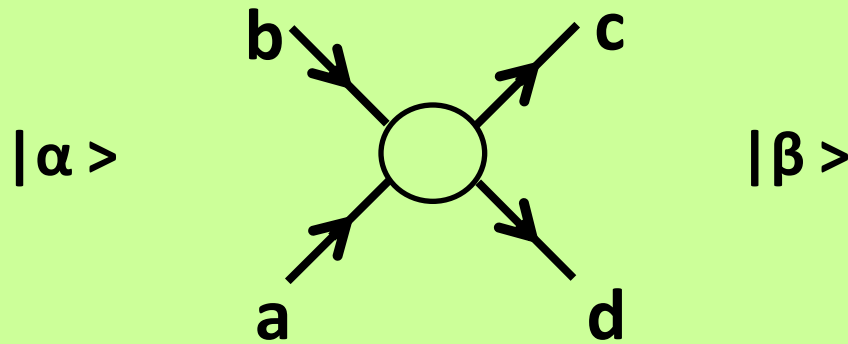
**Accademia delle Scienze
di Torino
8 Novembre 2017**

Alessandro Bottino

I **Poli di Regge** hanno origine nel metodo introdotto da Tullio Regge per studiare le proprietà fondamentali delle ampiezze di transizione in processi d'urto tra particelle elementari

Cerchiamo di chiarire come questa importante linea di ricerca si inquadri nella **fisica delle particelle tra la fine degli Anni '50 e l'inizio degli Anni '60**

Per studiare le proprietà delle particelle e delle loro interazioni è importante studiare processi di collisione tra particelle, per esempio



Il processo viene descritto dalla funzione complessa $S(\alpha,\beta)$
probabilità di transizione $P(\alpha,\beta) \equiv |S(\alpha,\beta)|^2$

Matrice $S \equiv$ matrice avente come elementi $S(\alpha,\beta)$ con **proprietà di unitarietà**

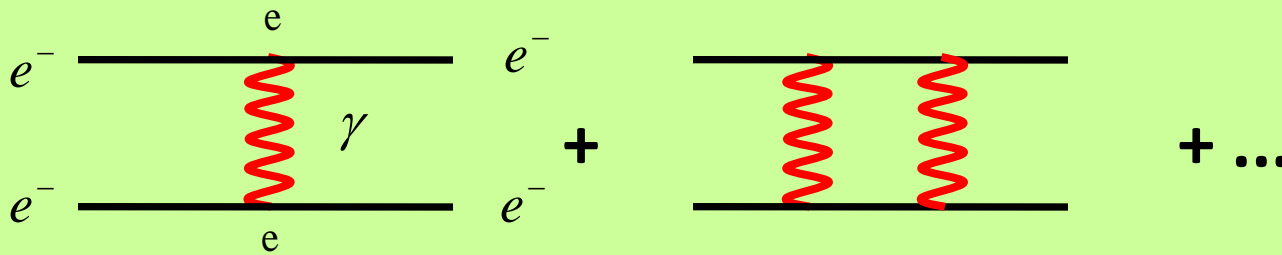
$$\sum_{\beta} P(\alpha, \beta) \equiv \sum_{\beta} |S(\alpha, \beta)|^2 = 1.$$

$$\sum_{\gamma} S(\alpha, \gamma) S^*(\beta, \gamma) = 0 \quad (\text{if } \alpha \neq \beta)$$

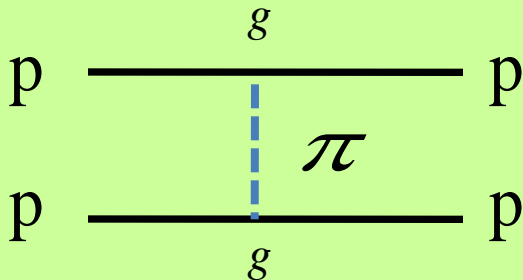
Nel caso di processi elettromagnetici (Elettrodinamica Quantistica) $S(\alpha, \beta)$ può essere sviluppata perturbativamente:

$$S(\alpha, \beta) = \sum_n \left(\frac{e^2}{2hc} \right)^n S_n$$

$$\frac{e^2}{2hc} \cong 1/137$$



Nei processi di interazione forte il meccanismo alla Yukawa (Hideki Yukawa, 1935) non consente uno sviluppo perturbativo

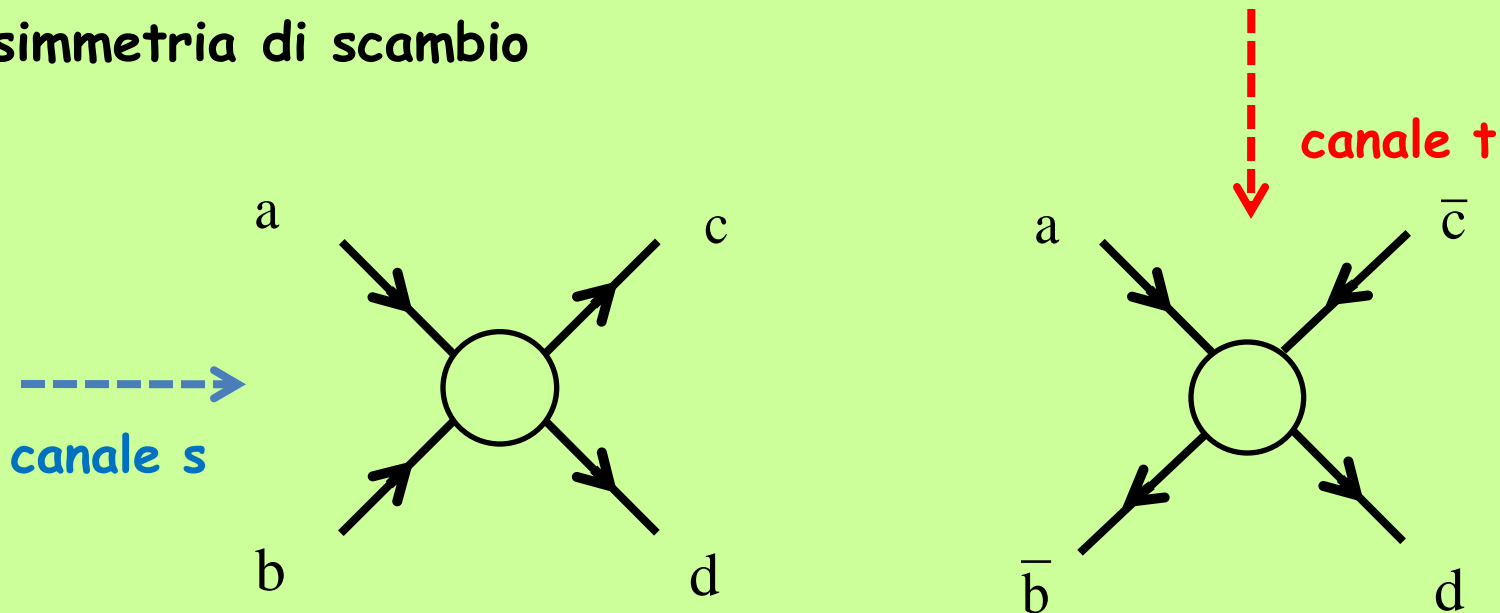


$$\frac{g^2}{2hc} \cong 15$$

Teoria della matrice S

La **funzione** $S(\alpha, \beta)$ associata al processo viene studiata mediante le seguenti proprietà:

- unitarietà
- analiticità (da **principio di causalità**)
- simmetria di scambio

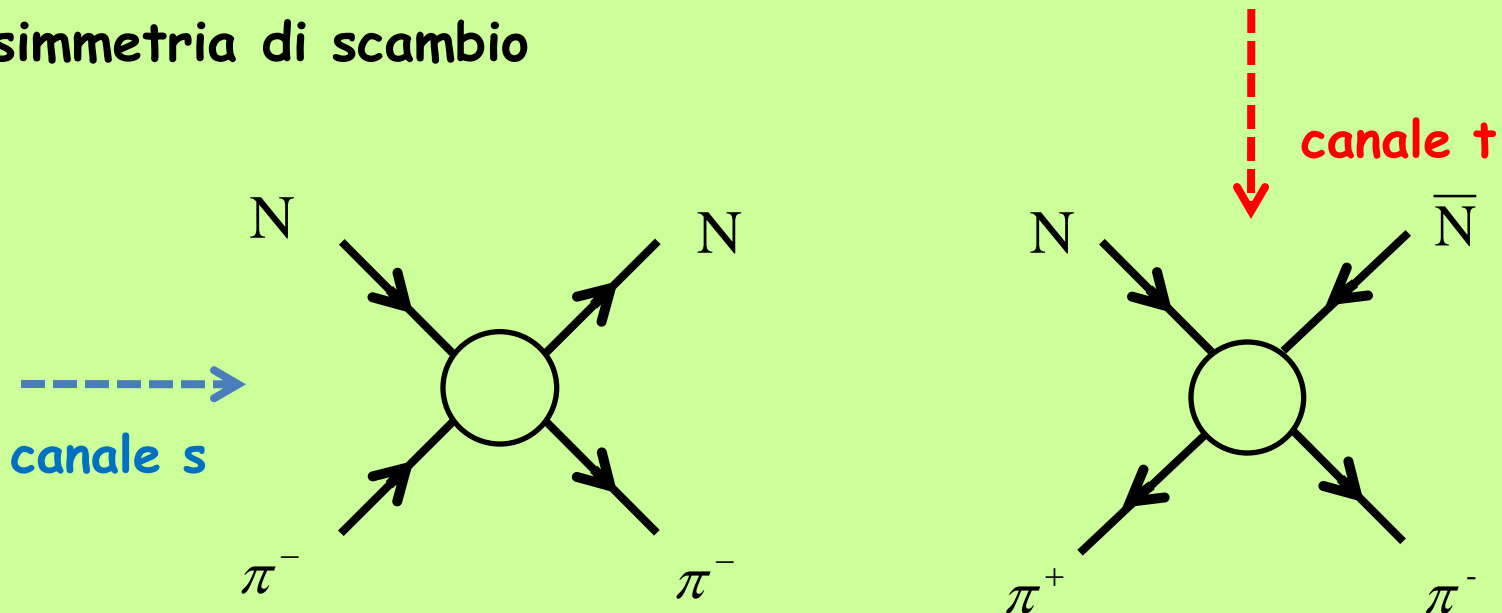


variabili: $s = (p_a + p_b)^2$, $t = (p_a - p_c)^2$

Teoria della matrice S

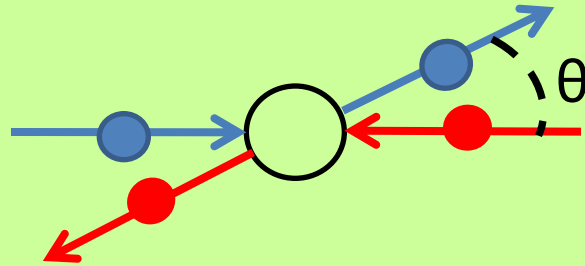
La **funzione** $S(\alpha,\beta)$ associata al processo viene studiata mediante le seguenti proprietà:

- unitarietà
- analiticità (da **principio di causalità**)
- simmetria di scambio



variabili: $s = (p_a + p_b)^2$, $t = (p_a - p_c)^2$

Urto elastico nel sistema del baricentro



in notazione non-relativistica e unità $\hbar/(2\pi) = c = 2\mu = 1$ (μ = massa ridotta)

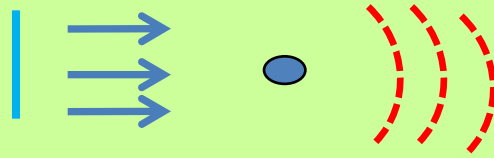
$$s = E = k^2 \equiv \omega, \quad t = 2E (\cos \mathcal{G} - 1)$$

E = energia totale, k = numero d'onda, θ = angolo di diffusione

passando dal canale s al canale t i ruoli delle variabili s, t si scambiano

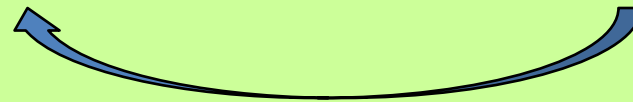
nel sistema del baricentro il problema a due corpi si riconduce a quello di una particella, di massa ridotta, diffusa da un centro diffusore

Diffusione di una particella da un potenziale



$$\psi \approx e^{i\omega(z/c-t)} + f(\omega, \cos\theta) e^{i\omega(r/c-t)} / r$$

ampiezza
d'urto



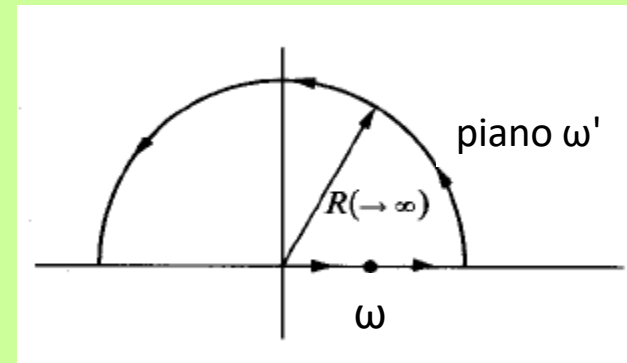
il principio di causalità applicato al processo d'urto implica che $f(\omega) = f(\omega, \cos\theta=1)$ sia analitica nel semi-piano superiore dell'energia ω quindi

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega}$$

se $f(\omega) \rightarrow 0$ più
rapidamente
di $1/\omega$ per $\omega \rightarrow \infty$

$$\text{Re } f(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Im } f(\omega')}{\omega' - \omega}$$

relazione di
dispersione



In alcune applicazioni la funzione $f(\omega)$ non ha il comportamento asintotico previsto precedentemente, in questo caso si può comunque ricavare una relazione di dispersione applicando la procedura precedente alla **funzione $f(\omega)$ divisa per una conveniente potenza di ω** . Per esempio nel caso della funzione $f(\omega)/\omega$ si ottiene

$$\operatorname{Re} f(\omega) = \frac{2\omega^2}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} f(\omega')}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}.$$

Glorioso antecedente storico: le relazioni di dispersione ottenute indipendentemente da **Kramers e Kronig negli anni 1926-1927 per l'indice di rifrazione**

Ruolo importante delle relazioni di dispersione se si tiene conto che **Im $f(\omega)$ è collegata alla sezione d'urto totale** mediante il **teorema ottico**, ottenibile dalle condizioni di unitarietà

$$\text{Im } f(\omega) = \frac{\omega}{4\pi c} \sigma_{tot}(\omega)$$



$$\text{Re } f(\omega) = \frac{2\omega^2}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Im } f(\omega')}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}$$



$$\text{Re } f(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\sigma_{tot}(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)}$$

La funzione complessa $f(\omega)$ può essere **completamente ricostruita** a partire dalla sezione d'urto misurata.

Alla fine degli anni '50 **Stanley Mandelstam** ipotizzò che in teoria relativistica l'ampiezza d'urto del processo $a + b \rightarrow c + d$ fosse analitica **nella coppia di variabili s, t** (relazione di dispersione doppia)

Tullio Regge si propose di verificare l'esattezza di questa ipotesi in un **contesto di teoria di potenziale**, con una linea di ricerca avviata al Max Planck Institut für Physik di Monaco di Baviera nel 1959 e proseguita all'Istituto di Fisica dell'Università di Torino nel 1960-61:

T. Regge: Introduction to Complex Orbital Momentum, *Il Nuovo Cimento* 14 (1959)

A. Bottino, A. M. Longoni and T. Regge, Potential Scattering for Complex Energy and Angular Momentum, *Il Nuovo Cimento* 23 (1962)

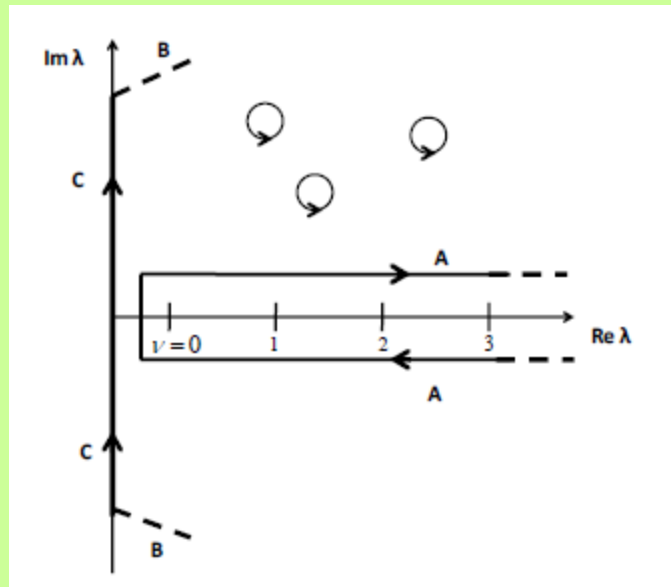
Metodo di Regge per studiare proprietà di analiticità della ampiezza d'urto elastica

Lo sviluppo in onde parziali

$$f(k, \cos \vartheta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\exp[2i\delta(l, k)] - 1] P_l(\cos \vartheta)$$

viene riscritto secondo la **trasformata di Sommerfeld-Watson**,
ossia la variabile intera l diventa variabile complessa ν e la
somma su l diventa un integrale sul cammino A

$$f(k, \cos \vartheta) = \frac{1}{4k} \int_A d\nu \frac{2\nu+1}{\sin(\pi\nu)} [\exp[2i\delta(\nu, k)] - 1] P_\nu(-\cos \theta)$$



$$\lambda = \nu + 1/2$$

Inciso storico

Trasformata di Watson-Sommerfeld utilizzata storicamente per valutare la **trasmissione lungo la superficie terrestre** di un'onda emessa da un oscillatore Hertziano di data frequenza

H. Poincaré, Rend. Circolo Mat. di Palermo, 29 (1910) 169

J. W. Nicholson, Phil. Mag. 20 (1910) 157

G. N. Watson, Proc. Roy. Soc. London, 95, issue 666 (1918)

A. Sommerfeld: Partial Differential Equations in Physics, Academic Press Inc., New York (1949)

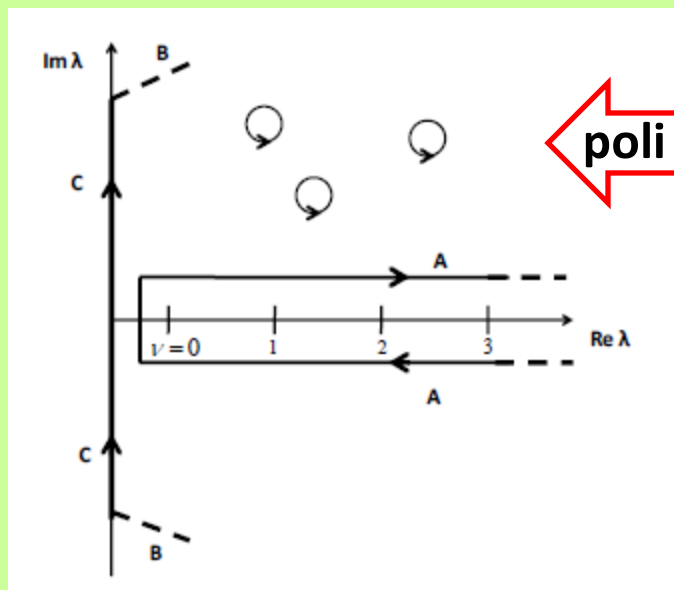
Metodo di Regge per studiare proprietà di analiticità della ampiezza d'urto elastica

Lo sviluppo in onde parziali

$$f(k, \cos \vartheta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\exp[2i\delta(l, k)] - 1] P_l(\cos \vartheta)$$

viene riscritto secondo la **trasformata di Sommerfeld-Watson**,
ossia la variabile intera l diventa variabile complessa ν e la
somma su l diventa un integrale sul cammino A

$$f(k, \cos \vartheta) = \frac{1}{4k} \int_A d\nu \frac{2\nu+1}{\sin(\pi\nu)} [\exp[2i\delta(\nu, k)] - 1] P_\nu(-\cos \theta)$$



$$\lambda = \nu + 1/2$$

Quindi l'integrale sul cammino A viene trasformato in integrali sui cammini B, C più residui nelle singolarità polari, tenuto conto delle proprietà analitiche della funzione integranda.

Da uno studio dettagliato della funzione $\exp[2i\delta(\lambda,k)]$ segue che il precedente integrale sul cammino A può essere riscritto come

$$f(k, \cos\theta) = \frac{1}{2k} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda \frac{\exp[2i\delta(\lambda,k)-1]}{\cos(\pi\lambda)} P_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos\theta) + \frac{i\pi}{2k} \sum_{n=1}^N S_n P_{l_n}(-\cos\theta) \frac{2l_n}{\sin(\pi l_n)}$$

e che quindi $f(k, \cos\theta)$ è analitica nel piano di $\cos\theta$ con la sola eccezione del taglio $\cos\theta$ reale > 1 e funzione meromorfa nel semi-piano $\text{Im } k > 0$. I poli di $\exp[2i\delta(\lambda,k)]$ sono localizzati nel quadrante $\text{Re } \lambda > 0, \text{Im } \lambda > 0$.

Per grandi valori di t (ossia di $\cos\theta$):

★ l'integrale sull'asse immaginario di $\lambda \rightarrow 0$

★ $P_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos\theta) \approx (\cos\theta)^{\lambda-\frac{1}{2}}$

e quindi $f(s, t) \approx C(s) t^{\alpha(s)}$ dove $\alpha(s)$ è $l'_n(s)$ con parte reale massima

Equazione radiale di Schrödinger

$$\psi''(r) + k^2\psi(r) - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\psi(r) - V(r)\psi(r) = 0$$

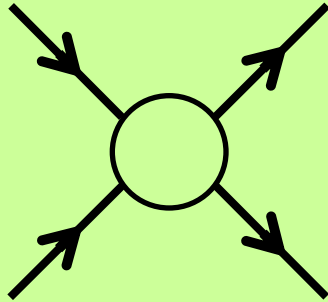
$\varphi(\lambda, k, r)$ soluzione che nell'origine si comporta come $\varphi(\lambda, k, r) \approx r^{\lambda + \frac{1}{2}}$

$f(\lambda, k, r)$ soluzione che all'infinito si comporta come $f(\lambda, k, r) \approx \exp[-ikr]$

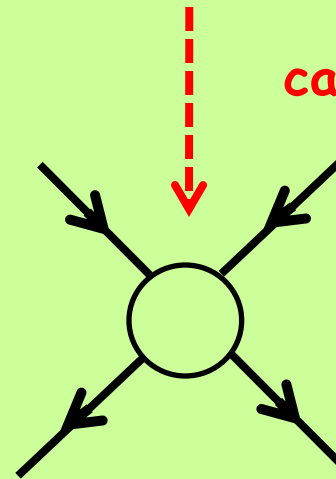
loro **Wronskiano** $f(\lambda, k) \equiv W[f(\lambda, k, r), \varphi(\lambda, k, r)]$

$$S(\lambda, k) \equiv \exp[2i\delta(\lambda, k)] = \frac{f(\lambda, k)}{f(\lambda, -k)} \exp\left[i\pi\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right]$$

canale s



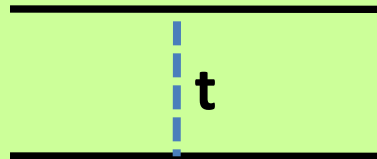
canale t



Per proprietà di dualità ($s \leftrightarrow t$) un **polo nel canale t** genera il **comportamento asintotico**

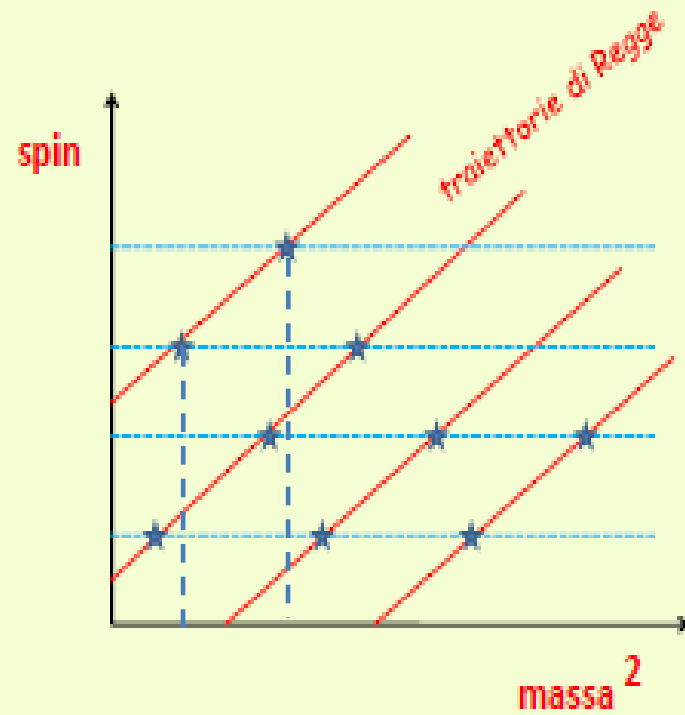
$$f(s, t) \approx C(t) s^{\alpha(t)} \text{ per } s \rightarrow \infty$$

I poli di Regge generalizzano il modello di Yukawa



$$S(l, t) \cong \frac{C(t)}{l - \alpha(t)} \quad (t = m^2)$$

Diagramma di Chew-Frautschi



Conclusioni

L'approccio di Regge allo studio della diffusione elastica di particelle mediante momento angolare complesso (poli di Regge) condusse a stabilire proprietà cruciali dell'ampiezza di diffusione: ossia **le sue proprietà analitiche (in 2 variabili complesse) e i suoi comportamenti asintotici.**

L'analisi di Regge, condotta in teoria non-relativistica, fu fonte di ispirazione per **estensioni in teorie relativistiche.**

Inoltre il metodo di Regge ebbe un ruolo determinante nel porre le basi di sviluppi teorici ulteriori: **il modello di Veneziano e i conseguenti modelli duali.**